



NLR-TP-99552

Geavanceerde numerieke methoden voor stochastische analyses

F.P. Grooteman



NLR-TP-99552

Geavanceerde numerieke methoden voor stochastische analyses

F.P. Grooteman

Dit rapport is gebaseerd op een artikel in “De Constructeur”, uitgegeven door Ten Hagen & Stam.

Uit dit rapport mag worden geciteerd onder de voorwaarde dat volledige bronvermelding plaatsvindt.

(H)afdeling: Constructies en Materialen
Afgesloten: 16 december 1999
Rubricering van de titel: Ongerubriceerd

Samenvatting

In dit artikel zullen de verschillende stappen worden uiteengezet voor het oplossen van een probleem, waarbij één of meer van de parameters stochastisch verdeeld is. Met name zal worden ingegaan op de belangrijkste stochastische methoden die hiervoor gebruikt kunnen worden en de geschiktheid ervan voor toepassing op het gebied van de mechanica. Aan de hand van een eenvoudig statica- en dynamica-probleem zal de methodiek worden gedemonstreerd.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	5
2	Keuze stochastische variabelen	8
3	Keuze verdelingsfunctie	9
4	Definiëren faalcriterium	10
5	Stochastische analyse	11
5.1	Directe integratie	13
5.2	Monte-Carlo simulatie	13
5.3	Importance sampling	14
5.4	Response surface methode	15
5.5	FORM	15
5.6	SORM	16
6	Voorbeelden	17
6.1	Balkprobleem	17
6.2	Dynamisch plaatprobleem	18
7	Conclusies	20
8	Referenties	20
9	Figuren	

1 Inleiding

Traditioneel worden constructies ontworpen met behulp van zogenaamde deterministische analyse methoden. Onder deterministisch wordt verstaan, een analyse, waarbij de geometrie, materiaaleigenschappen en belasting als een gegeven constante grootte worden gezien. Met andere woorden, de natuurlijke spreiding van dergelijke parameters wordt niet direct meegenomen in de analyse. Over het algemeen worden voor de parameters van het gebruikte model gemiddelde waarden aangenomen. De spreiding wordt dan achteraf verdisconteerd door middel van een veiligheidsfactor. Deze werkwijze leidt in het algemeen tot een betrouwbaar ontwerp, mits de veiligheidsfactoren zorgvuldig worden gekozen.

Het nadeel van een dergelijke manier van ontwerpen is dat het geen inzicht geeft in de mate van betrouwbaarheid van de constructie, anders dan dat bij een voldoende grootte van de veiligheidsfactor de betrouwbaarheid gegarandeerd is. Dit resulteert in het algemeen in een overgedimensioneerd (conservatief) ontwerp.

In veel gevallen zal dit laatste geen probleem zijn en is er geen dringende reden om van de huidige werkwijze af te stappen. Er zijn echter situaties denkbaar, waarbij de deterministische manier van ontwerpen ontoereikend is. Als voorbeelden kunnen dienen:

- Optimaliseren van constructies
Steeds vaker worden constructies geoptimaliseerd, wat resulteert in een minder conservatief ontwerp, omdat het aantal faalpaden toeneemt. Een te grote veiligheidsfactor zou de optimalisatie goeddeels te niet doen.
- Constructies waarbij de gevolgen van falen groot zijn.
Hierbij valt te denken aan vliegtuigconstructies, die zo optimaal mogelijk (naar kosten en gewicht) worden ontworpen, maar ook zeer betrouwbaar dienen te zijn. Stochastische methoden geven inzicht in de mate van veiligheid.
- Disciplines waarbij de natuurlijke spreidingsgetallen groot zijn.
Te denken valt hierbij aan de breukmechanica, waarbij de spreiding in levensduur aanzienlijk kan zijn.

In bovenstaande voorbeelden is er een tegenstrijdigheid te bespeuren in het te behalen optimaal ontwerp en betrouwbaarheid. Enerzijds worden constructies steeds optimaler ontworpen, mede door het op brede schaal beschikbaar komen van de benodigde analyse methoden. Anderzijds mag dit niet leiden tot een onbetrouwbaar ontwerp. Er is dus behoefte aan een methode die een kwantitatieve uitspraak kan doen over de betrouwbaarheid van een ontwerp. Met andere woorden, hoe verandert de kans op falen bij wijziging van het ontwerp. Waarbij falen zeer ruim moet worden gezien, in de betekenis dat de constructie niet meer voldoet aan de ontwerpcriteria.

Een stochastische methode is hiervoor het aangewezen gereedschap. Hierbij wordt de spreiding in modelparameters (dimensies, materiaaleigenschappen, belastingen) direct meegenomen in de analyse en zal ook het resultaat van de analyse spreiding vertonen.

In veel vakgebieden zijn stochastische methoden gemeengoed, te denken valt aan het verzekeringwezen, weersvoorspellingen, beursvoorspellingen. Zonder statistiek kunnen er in deze vakgebieden in het geheel geen uitspraken worden gedaan. De statistiek vindt dan ook zijn oorsprong in het verzekeringswezen.

Een belangrijk punt hierbij is dat de statistiek niet automatisch leidt tot betrouwbaardere uitspraken (beter overeenkomend met de werkelijkheid). Dit hangt voor een groot gedeelte af van de correctheid van de onderliggende deterministische modellen en de gebruikte invoergegevens. Als één van beide onjuistheden bevat, zal ook het resultaat onjuist zijn, “garbage in is garbage out”.

Het toepassen van statistiek om de afwijking van het deterministische model ten opzichte van werkelijkheid te verklaren is zinloos in het geval het deterministische model niet in staat is de werkelijkheid goed te beschrijven. Dit is evident in het geval van weers- en beursvoorspellingen.

Een stochastische analyse heeft een aantal voordelen ten opzichte van de conventionele deterministische analyse, deze zijn:

- Veel realistischer analyse.
- Spreiding in parameters direct verdisconteert.
- Geeft inzicht in de oorzaken van de spreiding in het eindresultaat.
- Veel minder conservatief. De mate van veiligheid is achteraf te bepalen.

Een voorbeeld is een breukmechanica analyse, waarbij de levensduur van een constructieonderdeel wordt bepaald. Hierbij moet een uitspraak worden gedaan omtrent de periode waarin de scheur zal initiëren en de snelheid waarmee de scheur vervolgens zal groeien onder de gegeven wisselende belasting. Vooral het bepalen van de scheurinitiatie periode is onderhevig aan een grote mate van spreiding. Met een stochastische analyse kun je deze spreiding op een natuurlijke manier verdisconteren. Verder geeft een dergelijke analyse inzicht in welke parameters bijdragen in de spreiding van het resultaat, door middel van een “sensitivity” analyse. Hieruit volgen de parameters die vooral bijdragen aan de spreiding in de levensduur, waarmee de constructie weer verder geoptimaliseerd kan worden.

In dit artikel zal nader worden ingegaan op de verschillende stappen waaruit een stochastische analyse bestaat, met de nadruk op de belangrijkste stochastische methoden die hiervoor gebruikt kunnen worden en de geschiktheid ervan voor toepassing op het gebied van de mechanica. Op dit gebied zijn met name de laatste 15 jaar veel ontwikkelingen geweest, die het mogelijk hebben

gemaakt dat stochastische analyses nu ook kunnen worden toegepast in de mechanica. Ook de toename in beschikbare computercapaciteit hebben dergelijke analyses mogelijk gemaakt. Dit laatste is direct één van de nadelen verbonden aan een stochastische analyse, welke zijn:

- Complexere numerieke analyse, resulterend in grotere rekentijden.
- Er is meer invoer vereist. In plaats van een enkelvoudige waarde voor een parameter moet nu de verdelingsfunctie worden gespecificeerd.
- De resultaten zijn uitgebreid met een extra dimensie (kans), wat interpretatie ervan moeilijker maakt.

De stochastische methoden die in dit artikel worden besproken zijn allen te zien als extra schil om een willekeurig deterministisch programma heen. Dit heeft als groot voordeel dat bestaande applicaties niet behoeven te worden aangepast. Het is ook mogelijk en soms ook efficiënter om de stochastiek te integreren in bestaande programmatuur. Een voorbeeld hiervan is een stochastisch eindige elementen programma.

Een stochastische analyse bestaat uit de volgende vier stappen:

- Keuze voor welke parameters van het model de spreiding zal worden meegenomen en welke deterministisch blijven. De eerste type parameters worden in het vervolg stochastische variabelen genoemd.
- Keuze van de verdelingsfuncties voor de stochastische variabelen.
- Definiëren van het faalcriterium (“limit-state” functie, faalfunctie).
- Oplossen van het stochastische probleem.

Deze vier stappen zullen aan de hand van een eenvoudig voorbeeld, een balkprobleem, worden besproken. De stochastische methoden komen aan de orde in het laatste punt.

Als voorbeeld zullen we kijken naar de doorzakking van een balk, welke aan één zijde is ingeklemd en aan de andere zijde is opgelegd, weergegeven in figuur 1. De doorzakking δ ter plaatse van C ten gevolge van een kracht F wordt door de volgende deterministische vergelijking gegeven, maar had bijvoorbeeld ook kunnen worden bepaald door middel van een eindige elementen analyse:

$$\delta_c = \frac{F a^2 b}{2EI} \left[\left(\frac{2a+3b}{6L} \right) \left(3 - \left(\frac{b}{L} \right)^2 \right) - 1 \right] \quad (1)$$

waarbij L de lengte van de balk is, a en b de afstand van respectievelijk de inklemming en oplegging tot het punt C waar de kracht aangrijpt. E is de elasticiteitsmodulus en I het

lijntraagheidsmoment van de doorsnede ten opzichte van de neutrale lijn. De volgende waarden zijn aangenomen voor de zes parameters van het model:

$$\begin{aligned}L &= 3 \text{ m} \\a &= 2 \text{ m} \\b &= 1 \text{ m} \\I &= 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \\E &= 7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \\F &= 1000 \text{ N}\end{aligned}$$

De deterministisch bepaalde doorzakking ter plaatse van punt C wordt hiermee:

$$\delta_C = 2,1 \text{ mm}$$

2 Keuze stochastische variabelen

Het model, vergelijking 1, bevat 6 parameters. De vraag is nu welke van de parameters als stochastische variabelen dienen te worden meegenomen. In principe kunnen alle parameters worden meegenomen als stochastische variabele, maar omdat de analyse in het algemeen complexer wordt (afhankelijk van de stochastische methode) naarmate het aantal parameters en het extra invoer vereist, is het beter om hier enige schifting aan te brengen.

Hierbij kan worden gekeken naar de mate van spreiding van de parameters en de invloed die dit heeft op de spreiding in het eindresultaat, hier de doorzakking. De eerste manier is een meer kwantitatieve methode en gaat ervan uit dat als de spreiding in de parameter zeer gering is, de invloed op de spreiding van het resultaat ook gering is en deze dus als deterministisch kan worden beschouwd.

Een betere methode is een zogenaamde “sensitivity” analyse, waarbij deze invloed wordt uitgerekend.

We gaan er hier vanuit dat de balk met zeer nauwe toleranties gemaakt kan worden (te verwaarlozen spreiding in L en I) en dat het punt van aangrijpen ook zeer nauwkeurig kan worden bepaald (te verwaarlozen spreiding in a en b). Alleen de spreiding in de kracht F en elasticiteitsmodulus E zal worden meegenomen.

3 Keuze verdelingsfunctie

De spreiding van een stochastische variabele wordt geheel gekarakteriseerd door middel van een verdelingsfunctie. Figuur 2 geeft hiervan een voorbeeld. De verdelingsfunctie beschrijft de kans op het optreden van een willekeurige waarde van de stochastische variabele en wordt dan ook de **(kans)dichtheidsfunctie** genoemd. De bekendste en meest toegepaste is de normale verdeling.

Andere veel toegepaste verdelingsfuncties in de mechanica zijn:

- Log-normale verdeling.
- Weibull verdeling (twee en drie parameter variant).
- “Extreme-value distributions” (de Weibull verdeling is hiervan een speciale variant).
- Exponentiële verdeling.

De verdelingsfunctie f wordt in het algemeen gekarakteriseerd door twee kentallen. Als voorbeeld wordt hier de normale verdeling gegeven:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2)$$

De normale verdelingsfunctie wordt beschreven door het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ van de variabele x .

Voor het bepalen van de verdelingsfunctie van een stochastische variabele moet voldoende data beschikbaar zijn. Met name het nauwkeurig bepalen van de staarten van de functie vereist nogal wat data. Door middel van curvefit-programmatuur en “Goodness-of-fit” tests kan een verdelingsfunctie bepaald worden die het best de data karakteriseert.

In het balkprobleem wordt aangenomen dat de elasticiteitsmodulus normaal verdeeld is:

$$f(E) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (3)$$

waarin voor μ respectievelijk σ de waarden $7 \cdot 10^{10}$ en $7 \cdot 10^9$ aangenomen zijn (grote spreiding).

Voor de kracht wordt een extreme-value verdeling type I maximum aangenomen:

$$f(F) = \frac{1}{\alpha} e^{-e^{-\left(\frac{F-F_0}{\alpha}\right)}} \quad (4)$$

waarin voor de kentallen α respectievelijk F_0 de waarden 78 en 955 aangenomen zijn.

De kans weergegeven door deze verdelingsfuncties $f(x)=P(x=X)$ is niet zo interessant. Theoretisch gezien is de kans op het optreden van een willekeurige waarde van de stochastische variabele zelfs nul. Interessanter is de kans dat de stochastische variabele x kleiner of gelijk is aan een bepaalde waarde X , geschreven als $P(x \leq X)$. Deze kans wordt weergegeven door het gearceerde oppervlak onder de verdelingsfunctie van figuur 2. De bijbehorende verdelingsfunctie wordt de cumulatieve verdelingsfunctie genoemd, welke loopt van 0 tot 1 (100% kans dat de waarde van x kleiner is dan $+\infty$). De **cumulatieve verdelingsfunctie**, hier aangeduid met $F(x)$, kan dus worden afgeleid uit de (kans)dichtheidsfunctie door middel van integratie:

$$P(x \leq X) = F(X) = \int_{x=-\infty}^{x=X} f(x) dx \quad (5)$$

Een voorbeeld van een dergelijke functie is gegeven in figuur 7. In het geval van het balkprobleem is de cumulatieve verdelingsfunctie alleen analytisch gegeven voor de extreme-value type I maximum verdeling:

$$F(F) = e^{-e^{-\left(\frac{F-F_0}{\alpha}\right)}} \quad (6)$$

De integraalvergelijking (5) is voor wat betreft de normale verdeling alleen numeriek op te lossen. Deze wordt dan ook in tabelvorm in boeken weergegeven (zie bijvoorbeeld Ref. 1).

4 Definiëren faalcriterium

Het resultaat van een stochastische analyse is het wel of niet betrouwbaar zijn van de constructie. De betrouwbaarheid wordt hierbij uitgedrukt in de kans dat de constructie faalt. Hiervoor is dus een faalcriterium vereist en een toegestane kans op falen. Dit faalcriterium is veel breder dan het werkelijk stuk gaan van de constructie, zoals het optreden van plastische vervormingen, breuk, knik.

Voor het balkprobleem wordt aangenomen dat de doorzakking ten hoogste 3 mm mag bedragen. De constructie heeft dus gefaald als de doorzakking groter wordt dan 3 mm. Het faalcriterium wordt hiermee:

$$\delta_C < 3 \quad (7)$$

Vaak wordt dit geformuleerd als:

$$G(E, F) = 3 - \delta_C(E, F) \quad (8)$$

Voor iedere willekeurige combinatie van E en F vinden we met vergelijking (1) een waarde voor de doorzakking δ_C en met (8) een waarde van de functie G , gegeven de constante waarden van de deterministische parameters.

Als voor een gegeven (E, F) paar de functie G positief wordt dan betekent dit dat de constructie niet heeft gefaald ($\delta_C \leq 3$ mm). Bij een negatieve waarde van G heeft de constructie gefaald. De functie G wordt dan ook de faalfunctie genoemd. Alle combinaties (E, F) waarbij G negatief wordt behoren tot de “failure set” en alle combinaties (E, F) waarbij G positief wordt behoren tot de “safe set”. Beide sets worden gescheiden door het zogenaamde “failure surface” of faaloppervlak waar de functie G gelijk is aan nul. Op deze manier is eenduidig een verband tussen falen en niet falen vastgelegd. Samenvattend:

$$G(E, F) > 0 \text{ Veilig}$$

$$G(E, F) = 0 \text{ Faaloppervlak, limit – state} \quad (9)$$

$$G(E, F) < 0 \text{ Falen}$$

Ieder stochastisch probleem is in deze vorm te schrijven en wordt dan ook algemeen toegepast. In het verloop van dit artikel zal deze definitie dan ook worden gebruikt.

5 Stochastische analyse

Tot nu toe is alleen nog maar gekeken naar de formulering van het stochastische probleem. Voor het oplossen ervan, het bepalen van de kans op falen, bestaan verschillende methoden. Het op te lossen vraagstuk is het bepalen van de kans op $G(\underline{x}) \leq 0$ en kan in een zelfde vorm worden geschreven als (5):

$$P(G(\underline{x}) \leq 0) = \int_{G(\underline{x}) \leq 0} f(\underline{x}) d\underline{x} \quad (10)$$

Hierin staat \underline{x} voor de vector van stochastische variabelen (in het balkprobleem $\underline{x} = \{E, F\}$). Deze vergelijking heeft dezelfde vorm als (5). Echter hebben we hier te maken met een meervoudige integraalvergelijking, voor iedere stochastische variabele één. De verdelingsfunctie $f(\underline{x})$ is hierbij afhankelijk van alle stochastische variabelen en wordt dan ook de **gezamenlijke**

dichtheidsfunctie genoemd. Een voorbeeld van een dergelijke functie is gegeven in figuur 3, voor de situatie van twee stochastische variabelen die beiden standaard normaal zijn verdeeld. In de figuur is ook een contourlijnen plot weergegeven van de verdelingsfunctie.

De kans of falen kan ook voor deze situatie gevisualiseerd worden, zoals is weergegeven in figuur 4. De kans of falen is nu gelijk aan het volume dat wordt ingenomen door de “failure set”, in de figuur het volume van de recht afgesneden moot.

Het oplossen van de integraalvergelijking is in het algemeen niet eenvoudig, vanwege de volgende redenen:

- Meervoudige integraalvergelijking.
- In het algemeen is de gezamenlijke dichtheidsfunctie niet bekend. Alleen de (kans)dichtheidsverdelingen van de afzonderlijke stochastische variabelen zijn bekend. Slecht in zeer speciale, meer academische gevallen, is deze functie te bepalen.
- De faalfunctie $G(x)$ is in het algemeen niet bekend in expliciete vorm, zoals voor het balkprobleem, maar alleen impliciet. De faalfunctie waarden worden in het algemeen bepaald door middel van een numerieke analyse. Bijvoorbeeld het berekenen van de doorzakking voor het balkprobleem gebruikmakend van een eindige elementen programma.

Voor het oplossen van vergelijking (10) zijn dan ook diverse stochastische methoden ontwikkeld. De belangrijkste zijn:

- Directe integratie.
- Monte-Carlo simulatie (MC).
- Importance sampling (IS).
- Response surface methode.
- Advanced Mean Value method (AMV, AMV+).
- First-Order-Reliability-Method (FORM).
- Second-Order-Reliability-Method (SORM).

Met name de laatste 15 jaar is er op dit gebied veel vooruitgang geboekt en zijn methodes als IS, AMV, FORM en SORM tot bruikbare gereedschappen geëvolueerd. Verder heeft ook de toename in computercapaciteit ervoor gezorgd dat stochastische analyses op low-end machines kunnen worden uitgevoerd.

De bovenstaande stochastische methoden zullen hieronder globaal worden besproken en met elkaar worden vergeleken op basis van:

- De nauwkeurigheid van de methode.
- De complexiteit van het algoritme.
- De benodigde rekentijd.

Uitgangspunt hierbij is dat de methode toegepast moet kunnen worden op engineering problemen, waarbij in het algemeen sprake is van een kleine kans op falen, in de orde van $p=10^{-3}$ of kleiner.

5.1 Directe integratie

De integraalvergelijking kan worden opgelost door middel van numerieke integratie, wat neerkomt op het berekenen van het volume van de “failure set” (zie figuur 4). De gezamenlijke dichtheidsfunctie $f(\underline{x})$ en faaloppervlak ($G(\underline{x})=0$) moeten hierbij in expliciete vorm bekend zijn, eventueel benaderd door middel van curve-fits. De functie wordt hierbij geëvalueerd op een aantal specifieke punten (integratie punten), vermenigvuldigd met een weegfactor en gesommeerd.

De functie $f(\underline{x})$ is over het algemeen gecompliceerd (zie bijvoorbeeld vergelijkingen (3) en (4)), waardoor er speciale integratieregels gebruikt moeten worden. Er bestaat vaak geen exacte integratieregel, waardoor er veel integratiepunten nodig zijn om een nauwkeurige oplossing te verkrijgen. Voor iedere integraal moet hierbij gedacht worden aan minimaal 10 integratiepunten. In het geval van vijf stochastische variabelen zijn dit dan al 10^5 integratiepunten, wat tot grote rekestijden leidt. Verder wordt de convergentie van de methode minder naarmate het aantal stochastische variabelen toeneemt.

Al met al is de methode slechts bruikbaar in een beperkt aantal situaties voor een gering aantal (<4) stochastische variabelen. Toepassing in engineering problemen is niet realistisch gezien de vereiste expliciete vorm van $G(\underline{x})$ en $f(\underline{x})$, de rekestijden en de te behalen nauwkeurigheid.

5.2 Monte-Carlo simulatie

Dit is de meest bekende en toegepaste stochastische methode. Dit komt door de eenvoud van de methode en het feit dat deze altijd convergeert naar de exacte oplossing. Aangetoond kan worden, dat de integraalvergelijking (10) kan worden herschreven tot:

$$P(G(\underline{x}) \leq 0) = \frac{\text{Aantal simulaties waarbij } G \leq 0}{\text{Totale aantal simulaties } N} \quad (11)$$

waarbij een simulatie bestaat uit het random kiezen van een waarde voor de verschillende stochastische variabelen, waarmee vervolgens de faalfunctiewaarde wordt bepaald.

Voor het balkprobleem betekent dit dat voor E en F random een waarde wordt getrokken gebaseerd op hun verdelingsfuncties (3) en (4), en hiermee de waarde voor de faalfunctie (8) wordt bepaald.

Voor iedere gevonden waarde van $G(\underline{x})$ wordt met behulp van vergelijking (9) gekeken of hierbij falen optreedt of niet. Het aantal malen dat falen optreedt gedeeld door het totaal aantal uitgevoerde simulaties geeft dan een benadering voor de kans op falen. De nauwkeurigheid neemt

toe naarmate er meer simulaties worden uitgevoerd. Dit is meteen ook het nadeel van deze methode.

Het aantal uit te voeren simulaties N hangt van de faalkans $p = P(G(x) \leq 0)$ af en kan worden afgeschat met:

$$N \approx 270 \frac{1-p}{p} \quad (12)$$

Hieruit blijkt dat bij een kleine kans het aantal simulaties zeer groot wordt. Voor $p=10^{-3}$ bedraagt het aantal simulaties al 270.000. Dit betekent dus dat de faalfunctie 270.000 maal geëvalueerd moet worden. Voor het balkprobleem is dit een eenvoudige expliciete vergelijking die snel te evalueren is, maar in het algemeen zal dit dus een impliciete functie zijn, bijvoorbeeld een eindige elementen analyse, hetgeen niet realistisch is gezien de enorme rekentijden die dit vereist.

5.3 Importance sampling

De kans op falen van een constructie zal in het algemeen klein zijn ($p \leq 10^{-3}$). Dit betekent dat de Monte-Carlo methode voor deze situaties ongeschikt is.

Bij de Monte-Carlo methode worden de waarden van de stochastische variabelen in een simulatie random bepaald, wat niet erg efficiënt is. Er zijn dan ook diverse verbeterde simulatie methoden ontwikkeld, hier samengevat onder de noemer “importance sampling”, waarbij op een efficiëntere manier de waarden van de stochastische variabelen worden gekozen, waardoor het aantal uit te voeren simulaties zal reduceren.

Stel dat we een stochastisch probleem hebben met één stochastische variabele x met verdelingsfunctie zoals gegeven in figuur 2. In een Monte-Carlo analyse zou voor het bepalen van de kans $P(x \leq L)$ (wat gelijk is aan $P(G \leq 0)$, met als faalfunctie $G=x-L$) random een waarde van x worden getrokken en worden gekeken of deze waarde kleiner is dan L . Hierbij zullen de meeste waarden liggen in het niet gearceerde gebied (“safe set”) geconcentreerd rond het gemiddelde μ . Om een betrouwbare waarde van de kans volgens vergelijking (11) te bepalen zijn een zeker aantal waarden nodig die in het gearceerde gebied (“failure set”) liggen. Naarmate het gearceerde gebied kleiner wordt (kleinere kans) zal steeds minder vaak een random waarde getrokken worden die in het gearceerde gebied ligt. Hierdoor, zullen er steeds meer simulaties nodig zijn om de kans voldoende nauwkeurig te bepalen.

De “importance sampling” methoden zijn er nu op gebaseerd dat het samplegebied niet het hele domein bestrijkt, maar alleen het *belangrijkste* gebied dicht in de buurt van het punt L . In figuur 2 nemen we aan dat het nieuwe samplegebied wordt bepaald door alles links van X_0 . Door nu alleen waarden te trekken die in dit gebied liggen, neemt de kans op het trekken van een waarde in het gearceerde gebied toe en zijn dus in totaal minder simulaties nodig.

Het probleem hierbij is voornamelijk gelegen in het vinden van een X_0 die zo dicht mogelijk in de buurt ligt van L . Voor dit eenvoudige voorbeeld is dit niet moeilijk, maar de lezer kan zich voorstellen dat dit wel het geval is voor een stochastisch probleem met meerdere stochastische variabelen, waarvan de gezamenlijke dichtheidsfunctie onbekend is. Hiervoor wordt vaak de nog te bespreken FORM methode gebruikt, of omgekeerd: de nauwkeurigheid van de FORM methode wordt verhoogd door na afloop een “importance sampling” methode toe te passen.

Voorbeelden van “importance sampling” methoden zijn te vinden in bijvoorbeeld referenties 2, 3 en 4.

Samengevat zijn deze methoden een stuk efficiënter dan de Monte-Carlo methode, maar de benodigde rekentijd staat of valt met het nauwkeurig kunnen begrenzen van het samplegebied. Dit laatste maakt het algoritme een stuk complexer ten opzichte van de Monte-Carlo methode.

5.4 Response surface methode

Bij deze methoden wordt de impliciete vorm van de faalfunctie (*responsie*) van een probleem benaderd door middel van een Taylor ontwikkeling (*oppervlak*). De faalfunctie wordt hiermee dan een expliciete vergelijking die eenvoudig te evalueren is en dus in combinatie met de Monte-Carlo methode te gebruiken is. De rekentijd gaat nu dus zitten in het bepalen van de coëfficiënten van de polynoom. Hoe hoger de orde van de polynoom hoe nauwkeuriger het eindantwoord, maar hoe groter de rekentijd. Hoger dan een tweede orde wordt dan ook meestal niet gegaan. De methode lijkt in dit opzicht op de nog te bespreken FORM en SORM methode, maar is minder nauwkeurig. De nauwkeurigheid wordt geheel bepaald door de polynoom benadering. Een voorbeeld van een dergelijke methode is te vinden in referentie 5.

5.5 FORM

In een aantal speciale situaties bestaat er een analytische oplossing voor de integraalvergelijking (10). Één daarvan is de situatie waarbij:

- Alle stochastische variabelen een standaard normale verdeling hebben.
- Alle stochastische variabelen statistisch onafhankelijk zijn van elkaar.
- Het faaloppervlak $G(\underline{x})=0$ een hypervlak is in de ruimte opgespannen door de stochastische variabelen.

In twee dimensies is dit een rechte lijn (figuur 4), in drie dimensies een vlak, enzovoort.

Als aan deze voorwaarden is voldaan, geldt de volgende analytische oplossing:

$$P(G(\underline{x}) \leq 0) = \int_{G(\underline{x}) \leq 0} f(\underline{x}) d\underline{x} = \Phi(-\beta) \quad (13)$$

waarin $\Phi()$ de standaard normale cumulatieve verdelingsfunctie is, te vinden in elk statistiek boek, en β de kortste afstand van de oorsprong tot het faaloppervlak zoals is weergegeven in figuur 4. Dit is het punt met de hoogste kansdichtheid en wordt dan ook de “safety index” of “most probable point (MPP)” genoemd.

De meerdimensionale integraalvergelijking is hiermee gereduceerd tot een optimaliseringsprobleem: het vinden van de kleinste afstand β .

Aan de drie gestelde voorwaarden wordt in de praktijk nooit direct voldaan. Door middel van variabelen transformaties kan aan de eerste twee voorwaarden worden voldaan, echter de laatste niet. De laatste voorwaarde komt erop neer dat het faaloppervlak ter plaatse van het MMP wordt benaderd door een recht vlak (eerste orde benadering), wat een zekere fout oplevert. Hieraan ontleent de methode dan ook zijn naam “First-Order-Reliability-Method”.

In figuur 5 betekent dit dat het deel van het volume wat extra wordt afgekapt door een recht vlak door het MPP, een maat is voor de fout. Deze fout wordt dus groot als het faaloppervlak ter plaatse van het MPP sterk gekromd is.

Tijdens het optimaliseren moet de faalfunctie diverse malen worden geëvalueerd. Hierbij is het aantal faalfunctie-evaluaties afhankelijk van het aantal stochastische variabelen, omdat in alle richtingen (bepaald door de variabelen) gezocht moet worden naar het optimum. De benodigde rekentijd hangt dus sterk af van het gebruikte optimalisatieschema en het aantal stochastische variabelen. In referentie 6 worden een aantal mogelijke optimalisatieschema's besproken.

Het transformeren van de stochastische variabelen (met name het onafhankelijk maken ervan) en het vinden van een efficiënt optimaliseringschema maken het algoritme dat aan deze methode ten grondslag ligt complex.

In de voorbeelden zal worden gedemonstreerd dat deze methode een aanzienlijke reductie geeft in rekentijd, maar dat de nauwkeurigheid niet altijd gegarandeerd kan worden. Vooral dit laatste maakt de methode minder geschikt als engineeringgereedschap.

Nauw verwant aan deze methode is de “Advanced mean value” methode (Ref. 7).

5.6 SORM

De lineaire benadering van het faaloppervlak beperkt de nauwkeurigheid van de FORM methode. Door het faaloppervlak te benaderen door middel van een hogere-orde benadering kan de nauwkeurigheid aanzienlijk worden verhoogd. In de SORM methode, “Second-Order-Reliability-Method”, wordt het faaloppervlak benaderd door een tweede-orde Taylor polynoom. Dit vereist een aantal extra G-functie evaluaties ten opzichte van de FORM methode, maar resulteert in een veel hogere betrouwbaarheid. Dit laatste maakt de SORM methode de meest geschikte methode op dit moment voor het uitvoeren van stochastische analyses op engineeringproblemen. Verder is de rekentijd nauwelijks afhankelijk van de te bepalen kanswaarde, dit in tegenstelling tot de Monte-Carlo methode waar bij kleinere kans het aantal simulaties sterk toeneemt. De rekentijd hangt af van het aantal stochastische variabelen in de analyse, wat juist bij de Monte-Carlo

methode geen invloed heeft. Bij een zeer groot aantal stochastische variabelen is de Monte-Carlo methode dus sneller. Over het algemeen zal in engineeringproblemen het aantal variabelen beperkt blijven, gezien het beperkte aantal modelparameters en de beschikbare statistische data voor deze parameters.

Globaal komt de SORM methode erop neer dat ter plaatse van het MPP de krommingen van het faaloppervlak worden bepaald in de $N_{rv}-1$ richtingen, waarbij N_{rv} het aantal stochastische variabelen is. Met deze informatie wordt het resultaat van de FORM oplossing aangepast. Het SORM algoritme is dus een uitbreiding op het FORM algoritme. Er zijn een aantal manieren waarop de krommingen kunnen worden bepaald, wat weer resulteert in verschillende SORM methoden. Meer details hierover kunnen worden gevonden in referenties 8 en 9.

6 Voorbeelden

De stochastische analyse zal aan de hand van het eerder beschreven balkprobleem en het dynamische gedrag van een plaat worden gedemonstreerd. Resultaten zullen hierbij worden gepresenteerd voor zowel de Monte-Carlo, FORM en SORM methode, zodat verschillen in nauwkeurigheid en rekeninspanning kunnen worden gedemonstreerd. Het aantal stochastische variabelen zal hierbij worden beperkt tot twee, omdat dan de faallijn nog te visualiseren is. De analyses zijn gemaakt met een bij het Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium (NLR) ontwikkeld programma, genaamd RAP (“Reliability Analyses Program”).

6.1 Balkprobleem

Als faal criterium voor het balkprobleem was aangenomen dat de constructie faalt als de doorzakking meer dan 3 mm bedraagt, oftewel:

$$G(E, F) = 3 - \delta_c(E, F) \quad (14)$$

waarbij E en F de twee stochastische variabelen zijn.

In figuur 6 is de faallijn voor deze situatie weergegeven, als de doorsnijding van de contourlijnen plot zoals schematisch weergegeven in figuur 5. Hierbij zijn beide variabelen getransformeerd naar een standaard normale verdeling. Uit deze figuur zijn alle (E, F) combinaties af te lezen waarbij falen ($G < 0$) op zal treden (links bovenin).

De kleinste afstand van de oorsprong tot de faallijn (MPP), berekend met de FORM methode, is:

$$\beta = 2,4357 \quad (15)$$

Dit resulteert, gebruikmakend van de standaard normale verdeling, in een faalkans van:

$$p_{FORM} = 7,43 \cdot 10^{-3} \quad (16)$$

Zoals blijkt uit figuur 6 is het faalcriterium geen rechte lijn, waardoor de FORM methode onnauwkeuriger zal zijn dan de SORM methode. Deze analyse resulteert in een faalkans van:

$$p_{SORM} = 8,82 \cdot 10^{-3} \quad (17)$$

Dit resultaat kan worden gecontroleerd door middel van een Monte-Carlo analyse, waarbij voldoende simulaties zijn uitgevoerd, zie vergelijking (12). Het resultaat van deze analyse voor 10^6 simulaties is:

$$p_{MC} = 8,85 \cdot 10^{-3} \quad (18)$$

met betrouwbaarheidsinterval:

$$8,63 \cdot 10^{-3} < p_{MC} < 9,07 \cdot 10^{-3} \quad (19)$$

We zien dus dat de SORM oplossing zeer nauwkeurig is. Ook de FORM oplossing is hier nog redelijk. In tegenstelling tot de **miljoen** Monte-Carlo simulaties zijn er, in dit geval, voor de FORM oplossing slechts **13** nodig en voor de SORM oplossing slechts **21**.

In figuur 7 is de cumulatieve verdelingsfunctie voor δ_C gegeven, waarbij de doorzakking zowel met vergelijking (1) als door middel van een eindige elementen analyse is bepaald. Met bovenstaande analyse is in het geval van de FORM en SORM methode slechts één punt van de cumulatieve verdelingsfunctie van δ_C bepaald. Veelal is informatie over een bepaald gedeelte van de verdelingsfunctie vereist, veelal de staarten van de verdeling. Deze kan dan worden bepaald door een aantal FORM of SORM analyses uit te voeren, hier aangegeven door de afzonderlijke punten in de figuur.

De kans op falen is ongeveer 10^{-2} . Of dit te hoog is hangt onder andere af van de consequenties van falen. Als bijvoorbeeld verlies van mensenlevens verwacht kan worden of het falen in een grote schadepost resulteert, zal de kans op falen veel kleiner (bijvoorbeeld 10^{-6}) gekozen worden. Uit een dergelijke figuur als figuur 7 is dan te herleiden wat de maximale doorzakking dan wordt.

6.2 Dynamisch plaatprobleem

Stel dat een plaat wordt geëxciteerd door een externe belasting bij een frequentie van 1,5 Hz. De plaat is alzijdig opgelegd, 2 bij 1 meter lang, 1 mm dik en gemaakt van aluminium ($E=7 \cdot 10^{10}$

N/m^2 , $\nu=0,3$ en $\rho=2800 \text{ kg/m}^3$). De deterministisch bepaalde eerste eigenfrequentie is dan 2,97 Hz. Wat hier voldoende ver verwijderd is van de excitatiefrequentie, om opslinging (resonantie) te voorkomen.

Wat is nu de invloed van spreiding in de plaatdikte en elasticiteitsmodulus op de ligging van de eerste eigenfrequentie van de plaat. Zowel de dikte als de elasticiteitsmodulus worden hierbij normaal verdeeld verondersteld, waarbij de volgende waarden zijn aangenomen voor respectievelijk het gemiddelde en de standaard deviatie:

- Dikte: $\mu=1 \cdot 10^{-3}$; $\sigma=1 \cdot 10^{-4}$
- E-modulus: $\mu=7 \cdot 10^{10}$; $\sigma=7 \cdot 10^9$

Wat is nu bijvoorbeeld de kans dat de eerste eigenfrequentie kleiner is dan 1,6 Hz en daarmee te dicht bij de excitatiefrequentie komt te liggen. Het faalcriterium wordt hiermee:

$$G(t, E) = f_{11}(t, E) - 1,6 \quad (20)$$

Voor het bepalen van de eigenfrequentie is in dit geval een eindige elementen analyse uitgevoerd, waarbij de plaat is opgedeeld in 10 bij 10 kwadratische schaalementen.

In figuur 8 is weer de bijbehorende faallijn gevisualiseerd, als de doorsnijding van de contourlijnen plot zoals schematisch weergegeven in figuur 5, waarbij beide variabelen naar een standaard normale verdeling zijn getransformeerd. De met FORM bepaalde kleinste afstand is:

$$\beta = 4,4235 \quad (21)$$

Dit resulteert, gebruikmakend van de standaard normale verdeling, in een faalkans van:

$$P_{FORM} = 4,86 \cdot 10^{-6} \quad (22)$$

De SORM methode resulteert in een faalkans van:

$$P_{SORM} = 5,60 \cdot 10^{-6} \quad (23)$$

Waarbij de SORM methode een iets grotere kanswaarde geeft dan de FORM methode, vanwege de kromming van de faallijn. Voor de FORM analyse waren 9 eindige elementen analyses nodig en voor de SORM analyse 17. Voor de Monte-Carlo methode zouden ongeveer 10^8 eindige elementen analyses nodig zijn geweest om een betrouwbaar antwoord te verkrijgen.

In figuur 9 is een deel van de staart van de verdelingsfunctie van de eerste eigenfrequentie geplot. Waarbij voor ieder punt een SORM analyse is uitgevoerd. Uit deze figuur blijkt dus dat er in dit geval slechts een kleine kans is dat de eerste eigenfrequentie in de buurt ligt van de excitatiefrequentie.

7 Conclusies

In dit artikel zijn de verschillende stappen uiteengezet voor het oplossen van een stochastisch probleem, waarbij één of meer van de parameters stochastisch verdeeld is. Voor het oplossen van stochastische mechanica problemen, waarbij de kans op falen over het algemeen klein is, zijn op dit moment de FORM en SORM methode het meest efficiënt, waarbij met de SORM methode een hogere nauwkeurigheid kan worden verkregen, echter ten koste van een groter aantal analyses. De Monte-Carlo methode is in deze situaties ongeschikt, vanwege het grote aantal uit te voeren simulaties.

De stochastische methode kan hierbij worden gezien als een schil over bestaande deterministische programma's (bijvoorbeeld een enkele elementen programma) heen.

8 Referenties

1. Miller, I.R., Freund, J.E., Johnson, R., *Probability and statistics for engineers, Prentice-Hall*, fifth edition, ISBN 0-13-712761-8, 1994.
2. Bucher, C.G., *Adaptive sampling - an iterative fast Monte Carlo procedure*, Structural safety, Vol. 5, 119-126, 1988.
3. Harbitz, A., *An efficient sampling method for probability of failure calculations*, Structural safety, Vol. 3, pp. 109-115, Jan. 1986.
4. Melchers, R.E., *Importance sampling in structural systems*, Structural safety, Vol. 6, No. 1, pp. 3-10, 1989.
5. Faravelli, L., *Response surface approach for reliability analysis*, Journal of engineering mechanics, ASCE, Vol. 115, No. 12, pp. 2763-2781, 1989.
6. Liu, P.L. and Der Kiureghian, A., *Optimization algorithms for structural reliability*, Computational probabilistic mechanics, ADM-93, ASME, pp. 185-196, 1988.
7. Wu, Y.T.; Millwater, H.R. and Cruse, T.A., *Advanced probabilistic structural analysis method for implicit performance functions*, AIAA journal, Vol. 28, No. 9, pp. 1663-1669, Sept. 1990.



8. Der Kiureghian, A., Lin, H.Z. and Hwang, S.J., *Second order reliability approximations*, Journal of engineering mechanics, ASCE, Vol. 113, No. 8, pp. 1208-1225, 1987.
9. Tvedt, L., *Distribution of quadratic forms in normal space - application to structural reliability*, Journal of engineering mechanics, ASCE, Vol. 116, No. 6, pp. 1183-1197, June 1990.

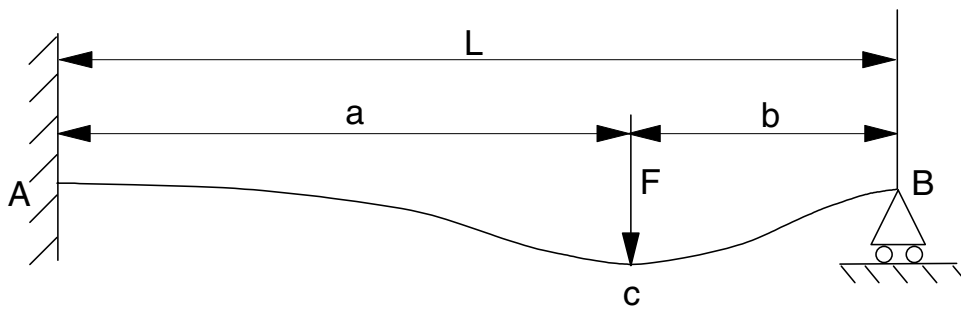


Fig. 1 □ Definitie van het balkprobleem

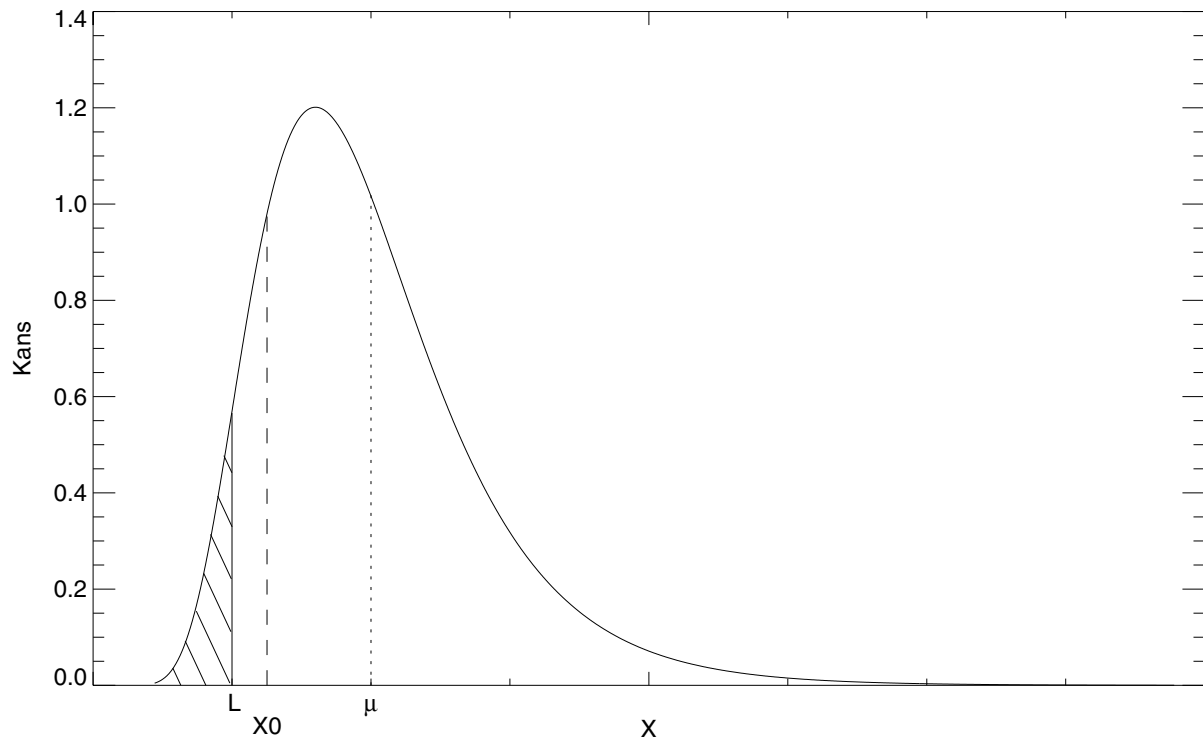


Fig. 2. Voorbeeld van een kansdichtheidsfunctie

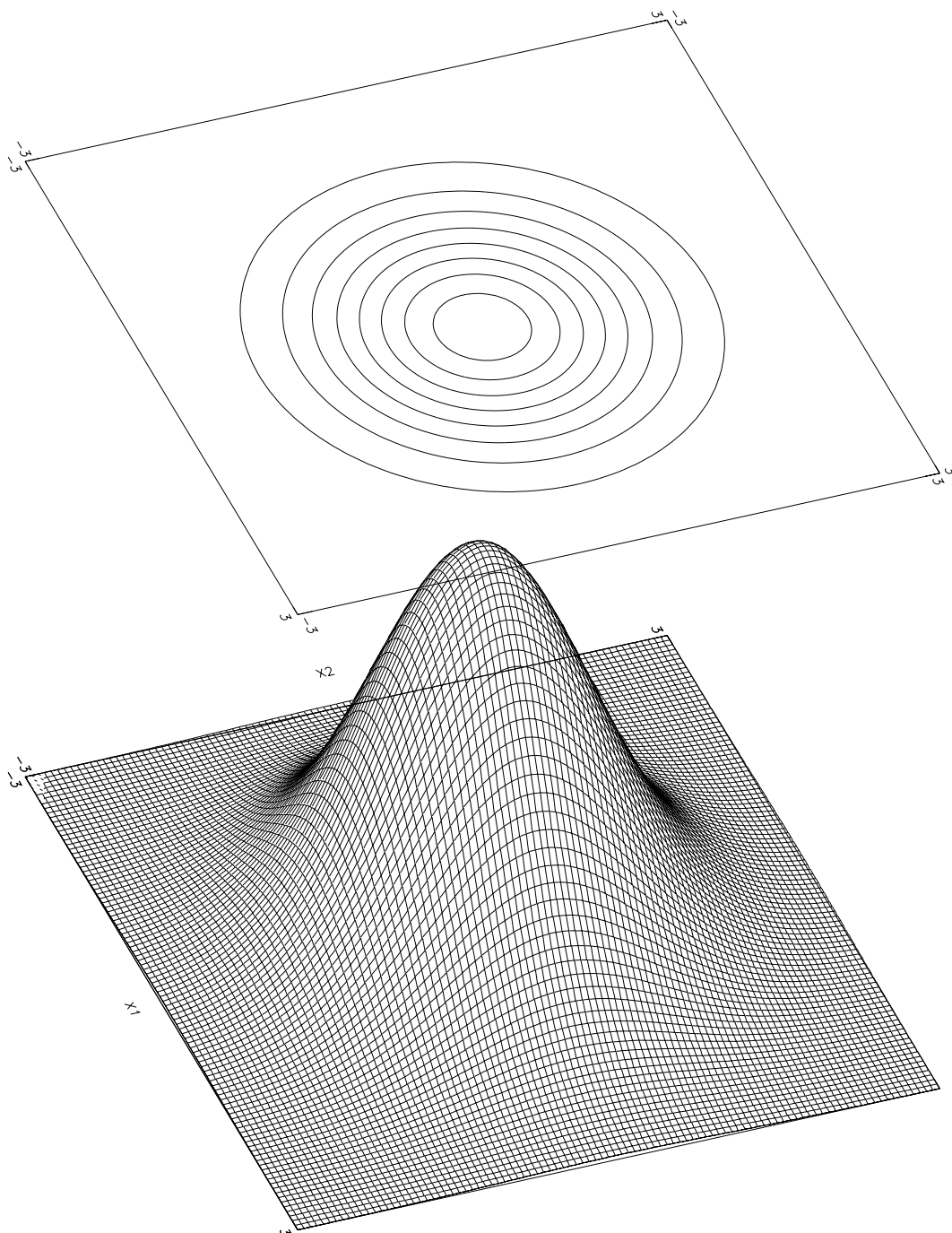


Fig. 3 Oppervlakte en contour plot van een gezamenlijke dichtheidsfunctie, met X_1 en X_2 standaard normaal verdeelde stochastische variabelen

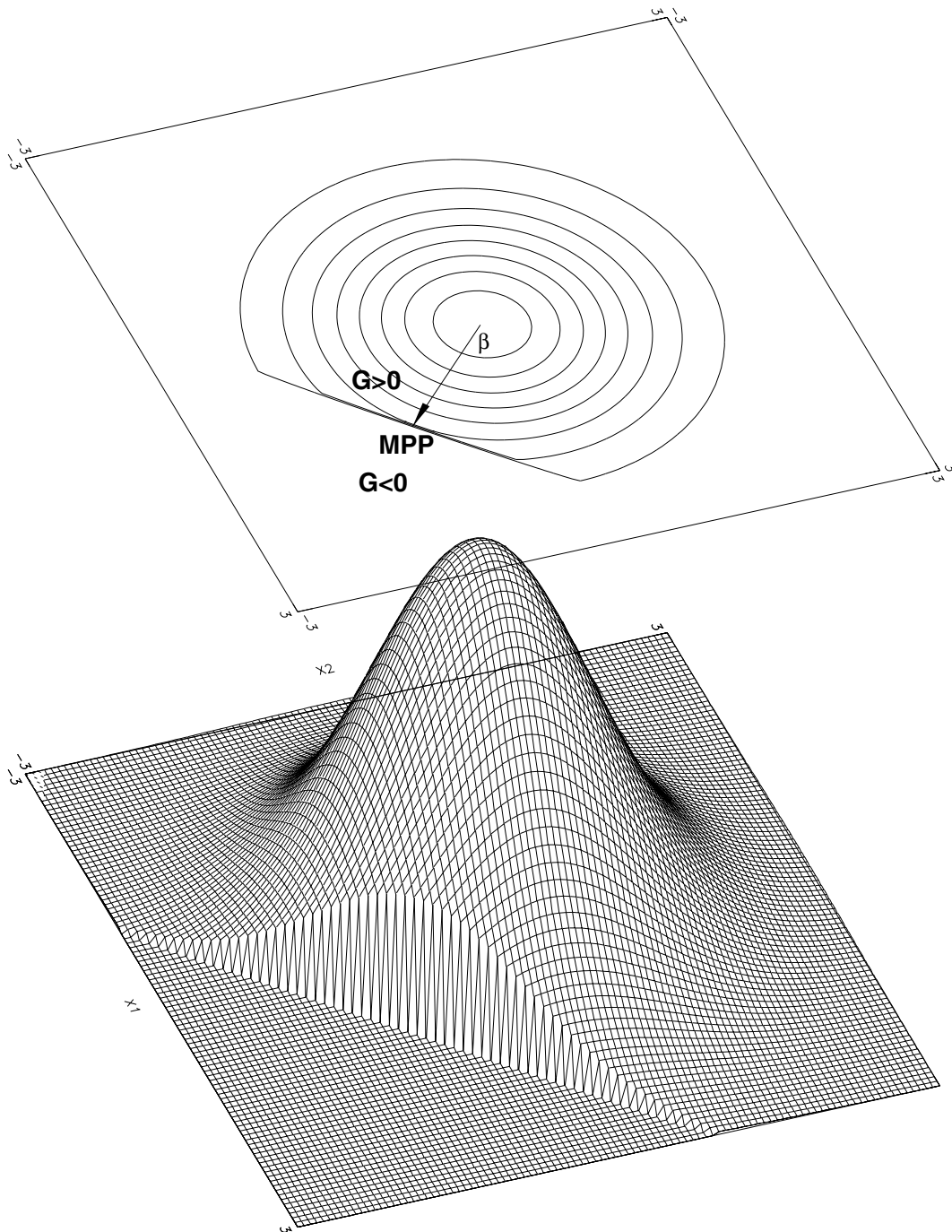


Fig. 4 Voorbeeld van een lineaire faallijn, met weglating van de "failure set"

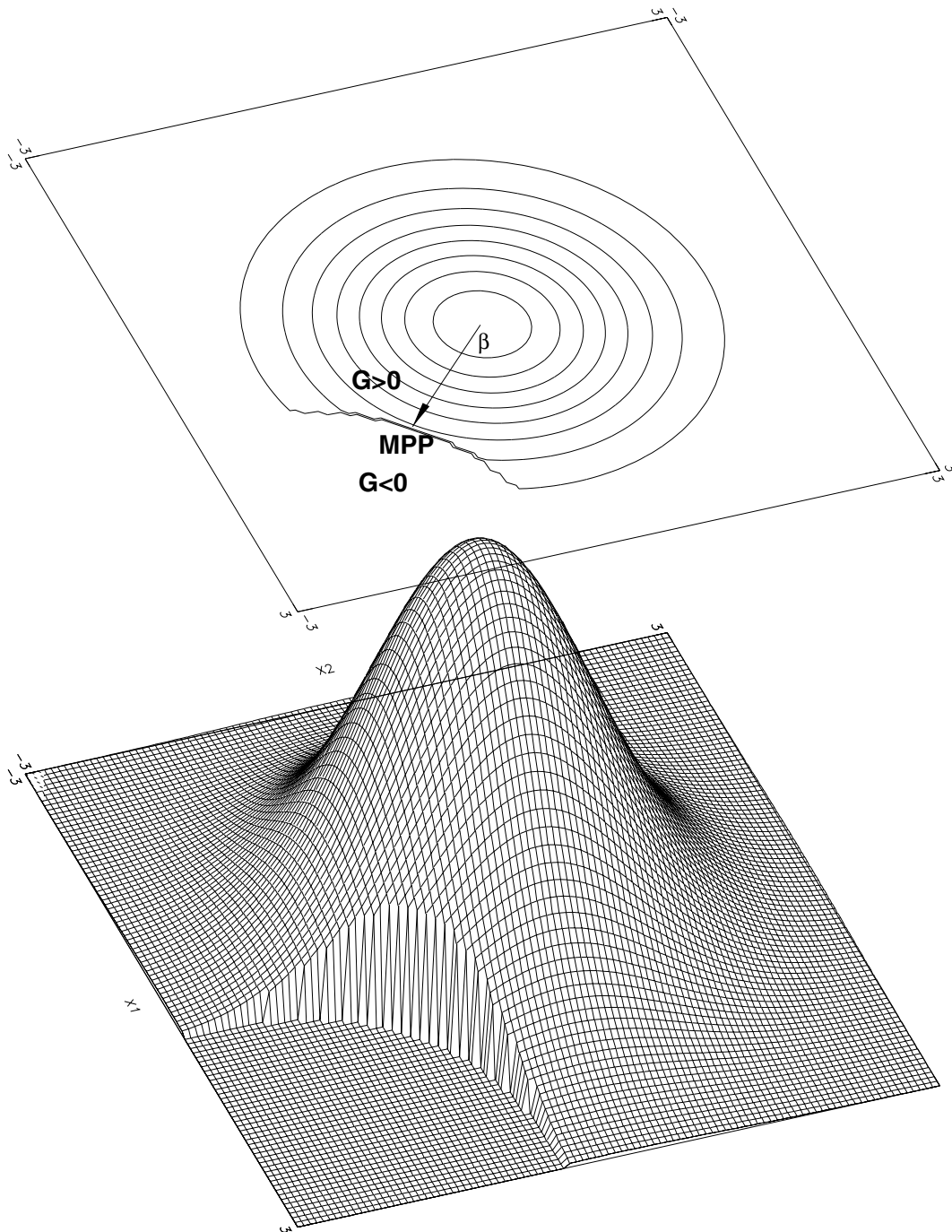


Fig. 5 Voorbeeld van een gekromde faallijn, met weglating van de "failure set"

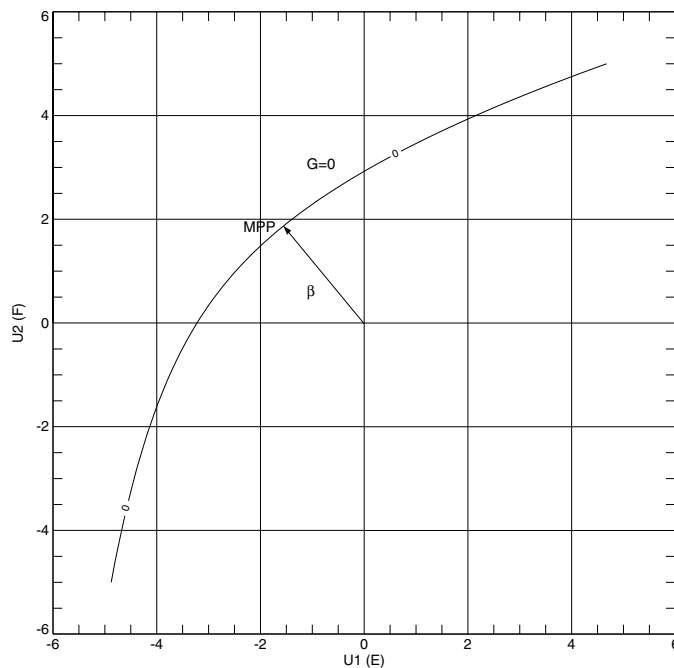


Fig. 6 Faallijn ($G=0$) voor het balkprobleem in de standaard normale ruimte

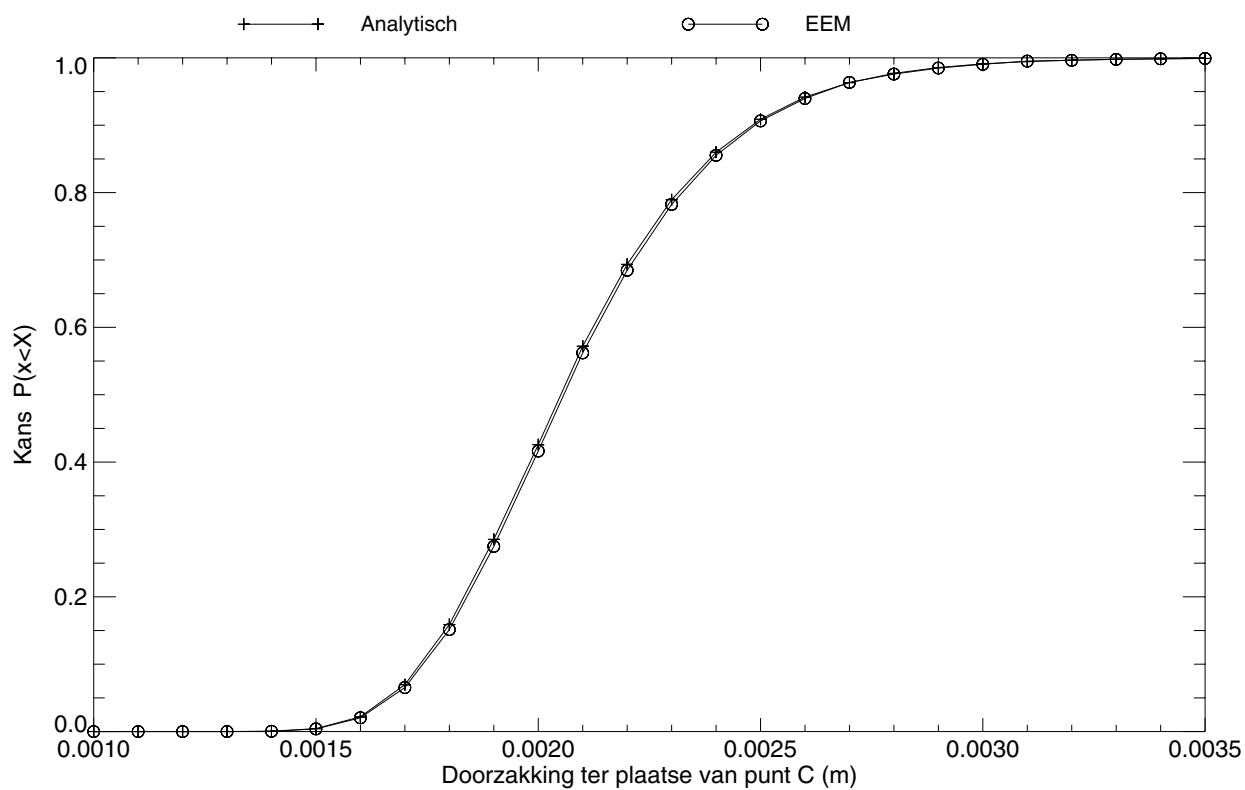


Fig. 7 Berekende cumulatieve verdelingsfunctie voor het balkprobleem

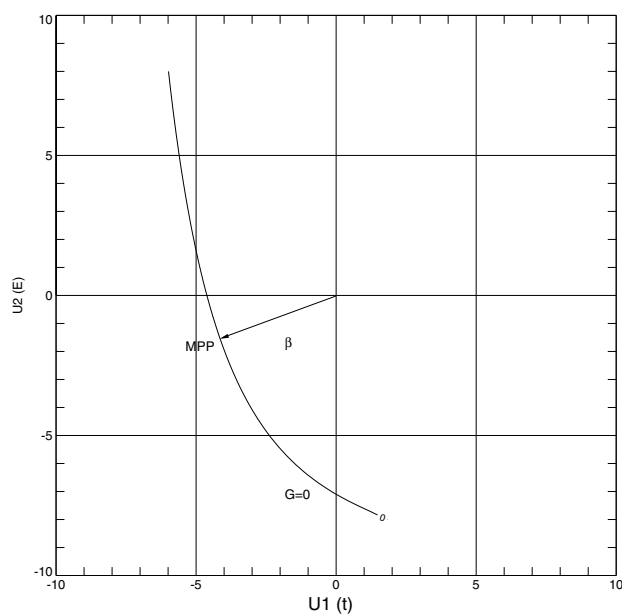


Fig. 8 Faallijn ($G=0$) voor het plaatprobleem in de standaard normale ruimte

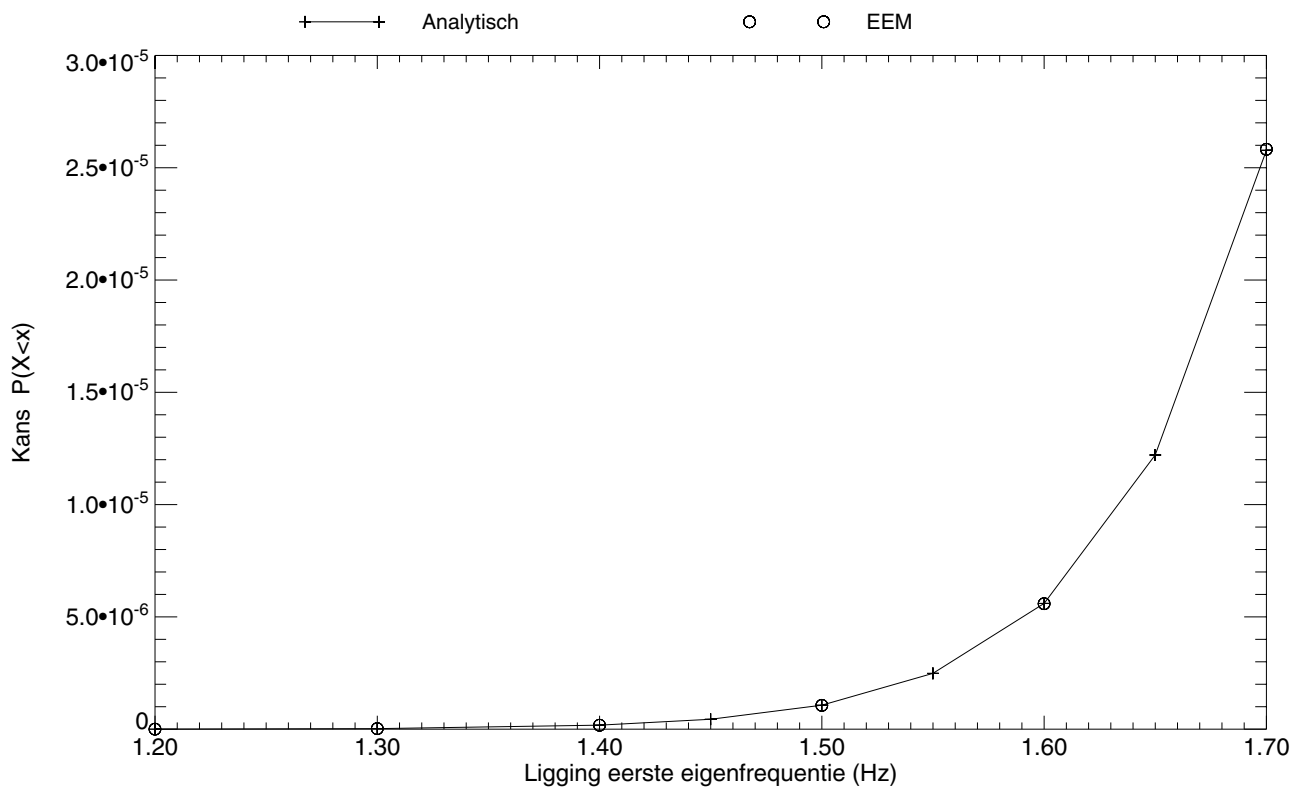


Fig. 9 Berekende linker staart van de cumulatieve verdelingsfunctie voor het plaatprobleem